

DM de mathématiques n°2

Logique et rédaction

10/09/2026

à rendre pour le mardi 15 septembre.

Faites vos DM **individuellement**. En cas de blocage, vous pouvez :

- **Demander un *indice*** (pas la solution complète) à quelqu'un qui a déjà trouvé. Dans ce cas, précisez en marge de chaque question concernée : « **Aidé(e)** par Untel ».
- **Exceptionnellement : travailler en binôme** avec un autre élève (un seul) qui n'a pas trouvé la question non plus. Une fois le raisonnement trouvé, chacun devra rédiger la solution à sa façon. Dans ce cas, précisez en marge de chaque question concernée : « **Faite** avec Untel ».

Les DM ne sont pas notés. Se faire aider n'est pas pénalisé. Mais gardez à l'esprit que les DM servent à vous entraîner aux DS, et qu'aucune aide extérieure ne sera possible en DS!

1 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$8 - 2x \leq \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$$

2 ★★ On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq n$.
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $u_n \geq \sqrt{n+1}$.

3 ★★ Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) : \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(m+n) = f(m)f(n)$$

On se donne f une fonction solution de (E) .

- 1) Déterminer les deux seules valeurs possibles pour $f(0)$. On les notera α et β avec $\alpha < \beta$.
- 2) On suppose que $f(0) = \alpha$. Déterminer f .
- 3) On suppose que $f(0) = \beta$ et on pose $a = f(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f(n)$ en fonction de a .
- 4) Quelles sont toutes les solutions de (E) ? On précisera le raisonnement utilisé.